

感應電機電磁渦流場有限元方程系統構成

編撰： 勢流科技 陳桂村

摘要

本研習探討電機電磁渦流場進行有限元分析(Finite Element Analysis, FEA)所必須的線性模型構成，以利於後續運用各種數值演算法(Algorithm)進行電腦程式編輯、運算，而求出目標空間內待求未知函數的趨近解。推導有限元方程式的兩種普遍方法：變分法(Variational Approach)和加權餘量法(Weighted Residual Method, WRM)。有限元方法的基本概念，是把問題的求解區域分割成若干數量的小區間或元素(Elements)，各元素內部的未知場量值藉由簡單的形狀/插值/加權(Shape/Interpolation/Weight)函數來趨近。其按統御方程式完成各元素的構成以及組合所有元素之後，即產生一個數量龐大的線性系統方程(Linear System of Equations)，再經過聯立解算便可獲致整個區域場量的解；方程式中，與時間相關的暫態情形，則是在 FEM 的架構上，藉由時步(Time-Step)法來對時間離散化，而模擬系統的動態特性。本文以 FT031 先前文獻中推導得到的馬達渦流場電磁位勢方程式為基礎，以及在線性導磁材料的假設簡化下，依頻域(Frequency Domain)的時譜(Time-Harmonic)形式展演相關 2D 有限元方程式的構成。

關鍵字： FEA, Variational Approach, Weighted Residual Method, Elements, Linear System of Equations, Time-Step, Time-Harmonic.

(A) 介紹

電機特性模擬的優點在於其可以低成本預估電機的效能，而增進設計的相關流程；另外，基於設計變更而製作及重製原始模型來進行實物測試，也可能成本昂貴且相當耗時。因此，近年來運用數學方法來探討電機特性與效能已收到很多關注。一般而言，用來評估電機特性與效能的方法有解析(Analytical)和數值(Numerical)分析。

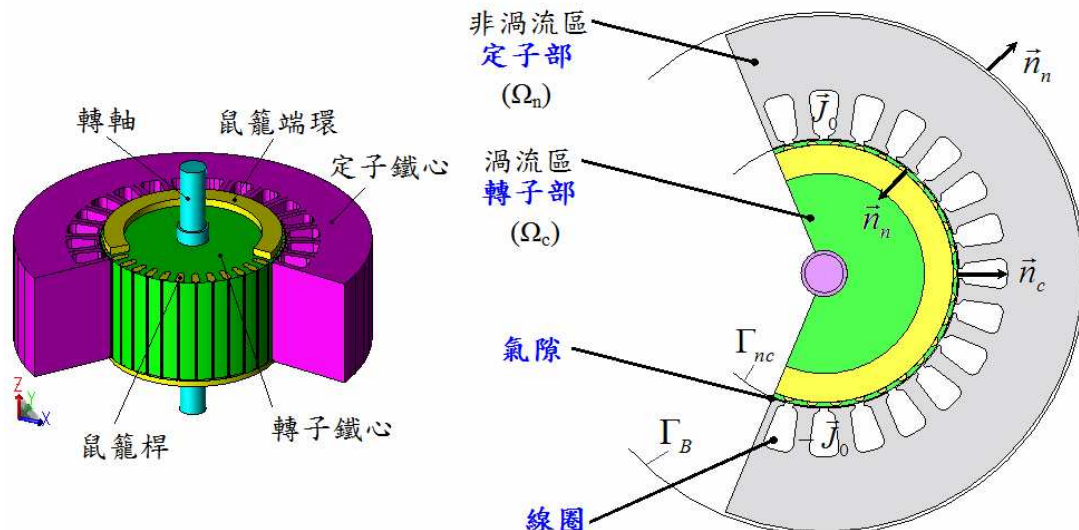


Fig.(1) 三相鼠籠感應馬達 3D/2D 模型渦流場問題的區域及其電磁效應

一般諸如集總(Lumped)參數對於等效電路的解析法，其相關方程式可以是穩態條件下的代數式，也可以是暫態情況下的偏微分方程式。這都只需對若干電路方程進行運算，並且能夠以相對簡易的電腦程式而達成快速求解。因此，大部份電機在知道相關參數之後，都可以運用電路模型(Circuit Models)來分析。這種解析方法以 MATLAB/Simulink 在電機動態特性的模擬最為典型，並且其中也運用到數值技術的時步法來進行時間離散。

然而，這個方法的主要限制：要精確決定電機的參數是很困難的，其中包括電機內部諸如導磁材料及幾何的非線性特徵[1,2,5]。除此之外，傳統上，還有其他解析法可用來求解電磁場問題，例如：鏡像法等；但是，這些方法多以確切的數學式呈現，而且只適用於具有簡單幾何及源項(Source)的靜電/磁場(Electrostatic/Magnetostatic)問題。

相對於解析法的封閉式(Closed Form)解，電磁場數值分析的具體內容：就給定的目標空間幾何，依據已知的材料參數及相關的邊界條件而求解一個定解問題，進而得到求解域內的電、磁場的空間分佈與時間變化情形。基本上，其能夠把設計上各方面深入的細節考量進來，除了磁路的非線性(材料磁滯、幾何結構)，諸如損耗和溫升的關鍵因素也能夠涵括；並且，對於磁鐵退磁(Demagnetization)、暫態現象、系統最佳化(Optimization)的分析等，尤其方便有效。儘管數值方法對求解問題是趨近的定義，其現今已可獲致趨近真實操作情況的分析結果[1,5]。

以上所述的兩種數學分析方法各有其適用的應用領域，及/或依各別設計階段對模型的不同要求，而可以在電機開發過程，依次漸進地從解析模型精進到數值分析模型，以獲取不同的設計訊息及逐步修正設計內容。例如，在馬達本體設計階段，數值方法可以優化磁路相關(幾何、材料)參數；在馬達驅動器的發展階段，電路模擬的解析模型則可以對電力電子轉換器及伺服控制器進行設計。另一方面，在產品趨於完善時，還可以採取場-路-運動耦合(Field-Circuit-Motion Coupled)的進階模型，實施電機特性與效能的模擬，獲致更趨近實際的設計與效果的驗證。

本文中，主要介紹有限元法在電機渦流場分析的應用，並且延續 FT031 先前文獻中所推導的馬達渦流場電磁位勢方程式，在假設條件：(1)材料導磁呈線性，(2)依常定頻率的時譜(Time-Harmonic)形式及(3)以恆定電流密度(J_0)為電源的模型簡化下，展演相關 2D 場域有限元方程式的構成。期望在普遍運用商業電磁有限元分析軟體(如 JMAG-Designer)的潮流下，使用者可以結合這個數值方法的內涵，而對解析電機的特性與效能有深一層的體驗。本研習內容在 (A) 節中，簡單比較了解析和數值方法，及其在數學上對電機分析可達成的效用。在 (B) 節中，簡單介紹 FEM 的實施流程，並簡述本研習中採用的加權餘量法，包含求解域的離散化以及形狀函數的選擇；在 (C) 節中，進行相關電磁場方程式的歸納，以及電磁場域算子方程式的推導；在 (D) 節中，對場域方程式實施離散化，其中包含按加權餘量法推導元素的有限元方程式，以及以一個簡單 2D 求解區域展示全域有限元方程式的組裝程序。

(B) FEM 的實施流程

以電磁學理論為基礎的電磁渦流場數值分析，主要是求解一個偏微分方程系統和一組邊界及/或初始條件所定義的邊界值問題(Boundary Value Problem, BVP)，以獲致相關區域內確卻的唯一解。然後，運用將模型場域離散化的概念與形式，而發展出各式各樣用於電磁場分析的數值方法，如：有限差分法(Finite Difference Method, FDM)、邊界元素法(Boundary Element Method, BEM)、有限元法(Finite Element Method, FEM)等。其中，有限元法因具備網格的靈活性，離散化方程求解的簡化，邊界條件處理及計算機程式編輯的方便性，而為目前各學術領域所普遍運用[1,2,5]。而且，FEM 包含了其他兩種方法的

大部份優點，並且在涉及複雜幾何、電磁材料和渦電流的非線性，以及與熱傳、機械效應的耦合等諸多方面，特別適合於關於電機問題的分析[1]。

(B-1) 求解域的離散化

FEM 的第一個步驟是把 BVP 的幾何區域藉由次級區劃而離散化，稱其為有限元素。而生成的網格由結點(Nodes)及連接各結點的邊線(Edges)所構成，如 Fig.(2) 所示，並且遵循下列各項原則：

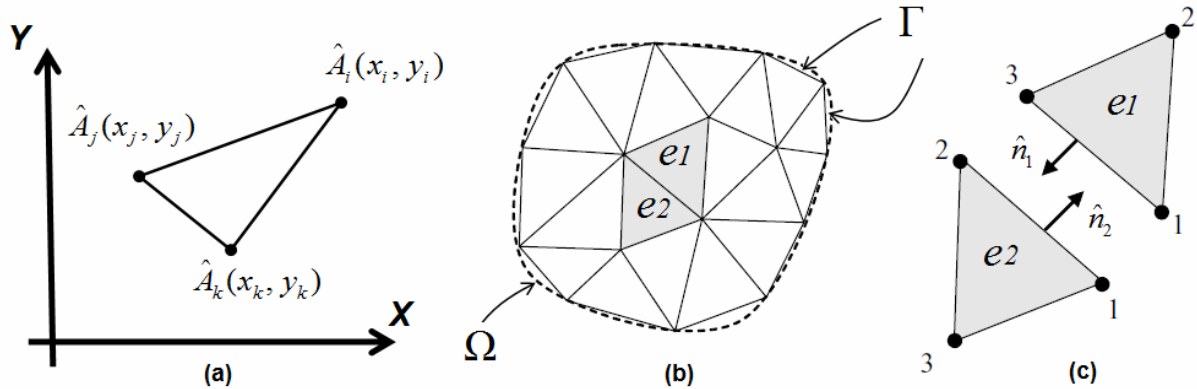


Fig.(2) 2D 直角座標系內典型三角形元素

- 結點必須設置在場域內部區間以及邊界上。
- 元素之間不可重疊，並且兩者之間不能有空白區間。
- 包含由不同材料構成的區域，其應藉由元素的邊線段來區隔。

現今，在 FEM 的應用領域中，已有許多通用類型和形狀的元素可供 BVP 的 2D 或 3D 空間進行離散化，如 Fig.(3) 中的前處理。而且，一般電機 2D 電磁場分析中，通常採用三角形的元素，除了可以簡單的數學形式來表示元素區域內的未知變量，並且隨著自動網格生成技術的普遍，可以無需人為介入即達成精確求解所需的優質網格。

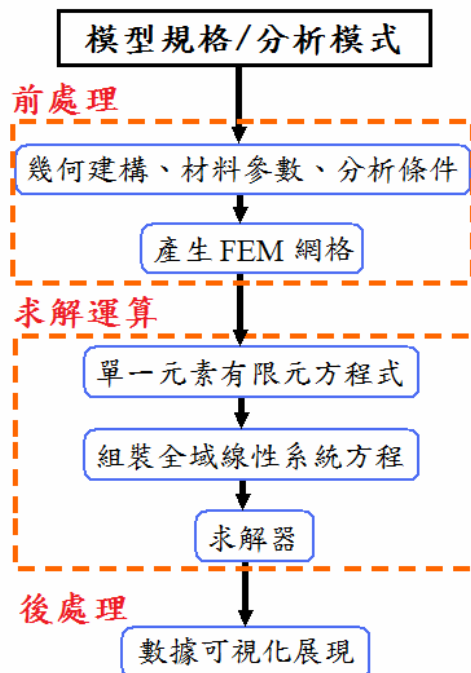


Fig.(3) 一般 FEM 軟體模擬實施的流程

(B-2) 形狀函數的選擇

在 FEM 求解運算中，BVP 的偏微分方程可以採取諸如：最小化能量的 Ritz 法、最小化加權餘量積分的 Galerkin 法或泛函極值的變分法，來求解每一個元素內的未知變量。在各別元素區域內，其採取一組形狀函數來表示該未知變量(\hat{x})，進而形成一組線性方程式；之後，將所有元素組裝(Assembly)整合，便得到一個全域的矩陣方程(Global Matrix Equations)系統。很多關於電機分析的實際例子，都是採用加權餘量法(WRM)進行的；並且，隨 Galerkin 法的普遍性日增，許多商用軟體的 FEA 都是採用這個方法[2,3]。

加權餘量法的基本原理，首先是對一個求解區域推導相關的算子方程式(Operator Equations, $F(x)$)，並在設定邊界條件後，解算 $F(x) = 0$ ，其中 x 是真正的解；另一方面，實際的 FEM 則是把如前述藉形狀函數表示的未知變量(\hat{x})也代入該算子方程式，而得到 $F(\hat{x}) = R$ 。由於 $x \neq \hat{x}$ ，真正解(x)與數值方法的趨近解(\hat{x})之間就有誤差，亦即餘量值(Residual, R)。於是，WRM 的目標就是要讓投射到該加權方程式的積分，在整個求解區域趨近於零。

當求解空間被離散成有限元素之後，即採取一個試驗函數在元素內部來逼近地表示場量的分佈、變化趨勢，並且基於微、積分運算簡易的考量，而通常採用多項式。對二維電磁場 BVP，一個完整 n -次多項式可以 (1) 式表示，並且相關的係數可依 Pascal 三角(如 Fig.(4))而輕易確定：

$$f = a_0 + a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4xy + a_5y^2 + \dots + a_my^n \quad (1)$$

a_0						
a_1x		a_2y				
a_3x^2		a_4xy		a_5y^2		
a_6x^3		a_7x^2y		a_8xy^2	a_9y^3	
$a_{10}x^4$		$a_{11}x^3y$		$a_{12}x^2y^2$	$a_{13}xy^3$	$a_{14}y^4$

Fig.(4) 二維多項式展開的 Pascal 三角

隨著所選擇試驗函數的類型(多項式的次方數)以及元素的形狀(2D 的三角形、四邊形，或 3D 的四面體、六面體等)不同，會有各式各樣的 WRM 類型。此外，對於同一組生成的網格，其試驗函數的次方數愈高，則可產生較精確的分析結果；然而，相關未知變量表式也愈複雜，因而會增加後續求解運算的負荷。

本研習中，元素的形狀採取三角形，並且假設元素中待解的磁向量位勢(\vec{A})呈線性分佈；於是，磁向量位勢在元素內任一點的值，可以藉由下列二元一次多項式表示：

$$\hat{A}(x, y) = c_0 + c_1x + c_2y \quad (2)$$

其中，係數 c_0, c_1, c_2 是要被決定的常數。由於磁向量位勢呈線性變化，因而相關的空間導數(即磁通密度 $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$)為常定值。因此，如 Fig.(2) 的 (a) 圖式裡三角形元素各點 (i, j, k)的 \vec{A} 值分別為：

$$\begin{cases} \hat{A}_i = c_0 + c_1 x_i + c_2 y_i \\ \hat{A}_j = c_0 + c_1 x_j + c_2 y_j \\ \hat{A}_k = c_0 + c_1 x_k + c_2 y_k \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{A}_i \\ \hat{A}_j \\ \hat{A}_k \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\hat{A} = \frac{1}{2\Delta} [(a_i + b_i x_i + c_i y_i) \hat{A}_i + (a_j + b_j x_j + c_j y_j) \hat{A}_j + (a_k + b_k x_k + c_k y_k) \hat{A}_k] \quad (5)$$

$$\begin{bmatrix} a_i & b_i & c_i \\ a_j & b_j & c_j \\ a_k & b_k & c_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_j y_k - x_k y_j & y_j - y_k & x_k - x_j \\ x_k y_i - x_i y_k & y_k - y_i & x_i - x_k \\ x_i y_j - x_j y_i & y_i - y_j & x_j - x_i \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\Delta = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix} \quad (7)$$

(3) 式 依線性代數方法求得以矩陣表示的 c_0, c_1, c_2 常數。

(4) 式藉由線性代數聯立求解，可得到 \bar{A} 依結點幾何位置(或幾何形狀)的分佈情形，而得到如 (5) 式的表達式。

(5) 式中的係數依元素各點(i, j, k)座標值的計算結果以矩陣表示。

(5) 式中的(Δ)代表三角形元素的面積，可藉由解析幾何求得。

與 (2) 式相較，(5) 式中各結點磁向量位勢的係數，即稱之為形狀函數(Shape Function, N)；並且，磁向量位勢(\bar{A})可以各結點的形狀函數乘以相應的磁向量位勢值的加總而獲致：

$$\begin{aligned} \hat{A} &= N_i \hat{A}_i + N_j \hat{A}_j + N_k \hat{A}_k \\ &= \sum_{r=1}^m N_r^T(x, y) \hat{A}_r(x, y) = [N_i \quad N_j \quad N_k] \begin{bmatrix} \hat{A}_i \\ \hat{A}_j \\ \hat{A}_k \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (8)$$

$m = 3$ 表示(三角形)元素的結點數。
 N_r ：表示元素的形狀函數。
 T ：矩陣轉置(右上標)。

依據 Galerkin 加權餘量法的原理，是選擇加權函數(W)與形狀函數(N)一致：

$$[W^e] = [N^e] = \begin{bmatrix} N_i^e \\ N_j^e \\ N_k^e \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} x &= x_i N_i + x_j N_j + x_k N_k = \sum_{r=1}^m N_r^T(x, y) x_r \\ y &= y_i N_i + y_j N_j + y_k N_k = \sum_{r=1}^m N_r^T(x, y) y_r \end{aligned} \quad (10)$$

按照 (9) 式所構成的元素也稱為等參元(Iso-parametric Element)，即用以對元素中的待解的未知變量求插值的加權函數(W)，與用來求得元素結點座標值的形狀函數(N)，兩者是相同的。後者相關推導過程參附件(一)。

一般商業電磁有限元分析軟體模擬實施的流程，如 Fig.(3) 所示。其中，場域有限元方程式的構成即為求解運算的主要內容，並具體歸納如下列實施步驟：

- 藉偏微分方程式來定義求解的問題，產生算子方程式。
- 把問題的求解區域細分成許多小區劃或元素。
- 依據未知變量的元素結點值(Nodal Values)選擇插值/形狀函數。
- 組合各別元素的方程式，並且產生全域的系統方程。
- 設定邊界條件。
- 採用適當方法求解該全域系統方程。

(C) 電磁場建模的場域方程式

本節中以依循 FT031 文獻中感應馬達電磁模型的内容，並且按下列假設而重新建立本研習所需的 2D 電磁場方程式，以利於有限元方程式的構成：

- (1) 材料導磁呈線性，
- (2) 依常定頻率的時諧形式，及
- (3) 以恆定電流密度(J_0)為電源。

在上述條件下，模型的相關參數($\nu, \sigma, \omega, V_{tz}$)皆為常定值。

(C-1) 電磁位勢函數方程式構成

電機裡的電磁場受 Maxwell 方程式的統御，如 Table(1) 所述：

Table(1) 感應電機裡的 Maxwell's 方程式

Maxwell's 方程式		說明
Ampere's 定律：	$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$ (11)	\vec{H} ：磁場強度
Faraday's 定律：	$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ (12)	\vec{B} ：磁通密度 \vec{E} ：電場強度
Gauss's 定律：	$\nabla \cdot \vec{B} = 0$ (13)	\vec{J} ：電流密度
電磁材料本構關係	$\vec{B} = \mu \vec{H}$ (14)	μ ：磁導率
	$\vec{J} = \sigma \vec{E}$ (15) (Ohm's定律)	ν ：磁阻率 (= $1/\mu$) σ ：電導率

由於 $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ ，基於無散場可以找到磁向量位勢(\vec{A})使得：

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (16)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial(\nabla \times \vec{A})}{\partial t} = -\nabla \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\text{或者 } \nabla \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad (17)$$

$$\text{於是 } \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla V$$

$$\text{或者 } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla V \quad (18)$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} = -\sigma \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \nabla V \right) \quad (19)$$

進而藉由向量分析的恆等式而得到 $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = \nabla \cdot \vec{B} \equiv 0$ 。

把 (16) 式代入 (2) 式，得到 (17) 式。

由向量分析的恆等式，常量梯度的旋度為零而得到。其中， V 為常量位勢。

把 (18) 式代入 (15) 式，得到 (19) 式。

(19) 式中的電流密度包含兩個部份： $(\partial \vec{A} / \partial t)$ 是基於電磁感應而產生的時變電流，而

(∇V) 則是在導體端部電荷累積所導致的電流。如果攜載電流的導體的長度為 l 且其正、負極端為 1、2 兩點；並且設定 1、2 點之間的常量電位勢(V)的差值為 V_{tz} ，於是

$$\begin{aligned} V_{tz} &= V_1 - V_2 = \int_1^2 \vec{E} dl \\ &= -\int_1^2 \nabla V dl = -\nabla V \cdot l \\ \text{或者 } \nabla V &= -\frac{V_{tz}}{l} \end{aligned} \quad (20)$$

在 2D 場問題中， ∇V 在 Z -方向是常定值，於是可獲致如 (20) 式的表示式。

因此，(19) 式中的電流密度便可寫成：

$$\vec{J} = -\sigma \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \frac{V_{tz}}{l} \right) \quad (21)$$

如一般旋轉電機的共同機械特點，轉、定子之間是以一個相對速度(\vec{v})而運動，於是必須定義兩個參考座標系統，其一座標 $O(x, y, z)$ 為靜止，另一座標 $O'(x', y', z')$ 為運動。假設兩者的時間度量 t 和 t' 為相同，則下列有關 \vec{E} 的關係式存在：

$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \quad (22)$$

於是，自靜止座標 $O(x, y, z)$ 所觀測到的電流密度便成為：

$$\begin{aligned} \vec{J} &= \sigma(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \\ &= -\sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \sigma \frac{V_{tz}}{l} + \sigma(\vec{v} \times \vec{B}) \end{aligned} \quad (23)$$

$$\nabla \times \vec{H} = -\sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \sigma \frac{V_{tz}}{l} + \sigma(\vec{v} \times \vec{B}) \quad (24)$$

把 (11) 式代入 (23) 式，得到 (24) 式。

$$\nabla \times (\nu \nabla \times \vec{A}) = -\sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \sigma \frac{V_{tz}}{l} + \sigma(\vec{v} \times \vec{B}) \quad (25)$$

把 (14)&(16) 式代入 (24) 式，得到 (25) 式。

當採取運動座標為參考系，由於相對速度變為零($\vec{v}=0$)；於是，本研習所探討電機的時域電磁場方程式，便可歸結如 (26) 式：

$$\nabla \times (\nu \nabla \times \vec{A}) = -\sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \sigma \frac{V_{tz}}{l} \quad (26)$$

$$\vec{E} = -j\sigma\omega\vec{A} \quad (27)$$

在頻域中，2D 的電場強度表達式。

$$\nabla \times (\nu \nabla \times \vec{A}) = -j\sigma\omega\vec{A} + \sigma \frac{V_{tz}}{l} \quad (28)$$

把 (27) 式代入 (26) 式，得到其在頻域的時諧形式。

本文中，(28) 式即為由電磁位勢函數構成的頻域時諧形式的電磁場方程式，其中只有磁向量位勢(\vec{A})一個待解的未知變量。並且，在求解二維問題時，磁向量位勢也是很有用的；如前所述，由於 2D 模型的電流為 Z 方向，如 Fig.(2) 所示，依 Ampere's 定律((11) 式)在直角座標系中可得到：

$$\vec{J} = J_0 \vec{e}_z \quad (29)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_z & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z \quad (30)$$

並且，從 $\vec{B} = \mu\vec{H}$ 知：磁場強度和磁通密度都只有 x 和 y 分量；再從 (16) 式可得到下列結果：

$$\vec{B} = B_x(x, y)\vec{e}_x + B_y(x, y)\vec{e}_y \quad (31)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & A_z \end{vmatrix} = \frac{\partial A_z}{\partial y} \vec{e}_x - \frac{\partial A_z}{\partial x} \vec{e}_y \quad (32)$$

$$\text{得到, } A_x = A_y = 0 \text{ 及 } A_z = A_z(x, y)\vec{e}_z \quad (33)$$

於是，在直角座標系中，磁向量位勢(\vec{A})只有 Z 方向分量，而且 (28) 式的場域方程表達式可進一步寫成：

$$\nu \left(\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial y^2} \right) = -j\omega\vec{A} + \sigma \frac{V_{tz}}{l} \quad (34)$$

從 (29) ~ (34) 式相關推導過程參附件(二)。

(C-2) 電磁場域算子方程式

首先，依照加權餘量原理，以一個趨近解 \hat{A} 代入 (34) 式中，得到一個餘量值(R)：

$$R = \nu \left(\frac{\partial^2 \hat{A}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{A}}{\partial y^2} \right) + j\omega\hat{A} - \sigma \frac{V_{tz}}{l} \quad (35)$$

並且，WRM 是在求解過程中為了使餘量儘可能趨近於零，具體做法是對 (35) 式的 R 值乘上一個加權函數[W]，且設定這個乘積的對整個求解空間的面積分為零：

$$\iint_{\Omega} WR dx dy = 0 \quad (36)$$

$$\iint_{\Omega} \nu W \left(\frac{\partial^2 \hat{A}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{A}}{\partial y^2} \right) dx dy + j\sigma\omega \iint_{\Omega} W \hat{A} dx dy = \sigma \frac{V_{tz}}{l} \iint_{\Omega} W dx dy \quad (37)$$

W ：加權函數。
 Ω ：BVP 的求解範圍；在 2D 問題中則是一個面積區域，如 Fig.(2) 的 (b) 圖式。

把 (36) 代入 (35) 式。

對 (37) 式左側第一項進行分部積分(Integration by Parts)，以化簡呈二階偏微分的擴散項：

$$\iint \nu W \left(\frac{\partial^2 \hat{A}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{A}}{\partial y^2} \right) dx dy = \nu \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial \hat{A}}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial y} \frac{\partial \hat{A}}{\partial y} \right) dx dy - \nu \oint_{\Gamma} W \left(\frac{\partial \hat{A}}{\partial \hat{n}} \right) d\Gamma \quad (38)$$

Γ : 元素區間(Ω)的邊界。
 \hat{n} : 元素邊界上朝外側的單位法向量, 如 Fig.(2) 的 (c) 圖式。

運用分部積分: $\int U dV = UV + \int V dU$, 其中:

$$U = W \left(\frac{\partial \hat{A}}{\partial \hat{n}} \right) \quad \text{及} \quad V = \left(\frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial \hat{A}}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial y} \frac{\partial \hat{A}}{\partial y} \right) \quad (39)$$

(38) 式中的線積分只用於有共同邊界的元素之間的情形, 並且藉由賦予自然邊界條件 (Natural Boundary Condition, NBC), 即 $\partial \hat{A} / \partial \hat{n} = 0$, 則該線積分因而略去; 於是, (38) 式可簡化為:

$$\iint \nu W \left(\frac{\partial^2 \hat{A}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{A}}{\partial y^2} \right) dx dy = \nu \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial \hat{A}}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial y} \frac{\partial \hat{A}}{\partial y} \right) dx dy \quad (40)$$

$$\nu \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial \hat{A}}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial y} \frac{\partial \hat{A}}{\partial y} \right) dx dy + j\sigma\omega \iint_{\Omega} W \hat{A} dx dy = \sigma \frac{V_{tc}}{l} \iint_{\Omega} W dx dy \quad (41)$$

把 (40) 代入 (37) 式。

(41) 式即為本研習用來推導電磁場有限元方程式所依循的算子方程式。

(D) 場域方程式的離散化

按 FEM 的實施原則, 整個 BVP 區域藉網格而分解成由許多元素的集合, 並使得求解運算過程對於元素內相關的面積分更簡便, 於是 (36) 式可寫成:

$$\iint_{\Omega} W R dx dy = \sum_{e=1}^L [W^e] [R^e] \Omega_e = 0 \quad (42)$$

L : 求解域中元素的數目。
 $[W^e]$: 個別元素的加權函數。
 $[R^e]$: 個別元素的餘量。
 Ω_e : 個別元素的面積。

(D-1) 元素的有限元方程式

按照 (9) 式, 把等參元的形狀函數 ($[W^e] = [N^e]$) 代入 (41) 式, 得到下列個別元素關於場域方程式的有限元表達式, 在式子中的上、下標 'e' 代表元素單位:

$$\underbrace{\nu \iint_{\Omega_e} \left(\frac{\partial [N^e]}{\partial x} \frac{\partial \hat{A}}{\partial x} + \frac{\partial [N^e]}{\partial y} \frac{\partial \hat{A}}{\partial y} \right) dx dy}_{\text{第一項}} + \underbrace{j\sigma\omega \iint_{\Omega_e} [N^e] \hat{A} dx dy}_{\text{第二項}} = \underbrace{\sigma \frac{V_{tc}}{l} \iint_{\Omega_e} [N^e] dx dy}_{\text{第三項}} \quad (43)$$

這個式子有三個子項, 以下依序展開各項積分的結果:

第一項的積分: 分別對磁向量位勢(\hat{A})和形狀函數($[N^e]$)相對於 x, y 取導數:

$$\frac{\partial \hat{A}}{\partial x} = \frac{1}{2\Delta} (b_i \hat{A}_i + b_j \hat{A}_j + b_k \hat{A}_k) = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{A}_i \\ \hat{A}_j \\ \hat{A}_k \end{bmatrix} \quad (44)$$

$$\frac{\partial \hat{A}}{\partial y} = \frac{1}{2\Delta} (c_i \hat{A}_i + c_j \hat{A}_j + c_k \hat{A}_k) = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} c_i & c_j & c_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{A}_i \\ \hat{A}_j \\ \hat{A}_k \end{bmatrix} \quad (45)$$

$$\frac{\partial [N^e]}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \\ \frac{\partial N_j^e}{\partial x} \\ \frac{\partial N_k^e}{\partial x} \end{bmatrix} = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k \end{bmatrix} \quad (46)$$

$$\frac{\partial [N^e]}{\partial y} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \\ \frac{\partial N_j^e}{\partial y} \\ \frac{\partial N_k^e}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} c_i & c_j & c_k \end{bmatrix} \quad (47)$$

並且，依據 (7) 式可以得到元素面積(Ω_e)的表示式：

$$\Omega_e = \iint_{\Omega_e} dx dy = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix} = \Delta \quad (48)$$

然後，把 (44) ~ (48) 式代回 (43) 式第一項，得到的積分結果：

$$\nu \iint_{\Omega_e} \left(\frac{\partial [N^e]}{\partial x} \frac{\partial \hat{A}}{\partial x} + \frac{\partial [N^e]}{\partial y} \frac{\partial \hat{A}}{\partial y} \right) dx dy = \frac{1}{4\Delta} \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{A}_i \\ \hat{A}_j \\ \hat{A}_k \end{bmatrix} \quad (49)$$

其中 (49) 式的係數矩陣內容如 (50) 式所列：

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_i^2 + c_i^2 & b_i b_j + c_i c_j & b_i b_k + c_i c_k \\ b_j b_i + c_j c_i & b_j^2 + c_j^2 & b_j b_k + c_j c_k \\ b_k b_i + c_k c_i & b_k b_j + c_k c_j & b_k^2 + c_k^2 \end{bmatrix} \quad (50)$$

第二項的積分：按照 (8) 式磁向量位勢(\vec{A})可依元素內各結點的形狀函數乘以相應的磁向量位勢值的加總，並且考慮到下列相關運算：

$$\iint_{\Omega_e} N_i^2 dx dy = \frac{\Delta}{6} \quad (51)$$

$$\iint_{\Omega_e} N_i N_j dx dy = \frac{\Delta}{12} \quad (i \neq j) \quad (52)$$

於是 (43) 式第二項的積分結果：

$$\begin{aligned} j\sigma\omega \iint_{\Omega_e} [N^e] \hat{A} dx dy &= j\sigma\omega \iint_{\Omega_e} [N^e] [N^e]^T \begin{bmatrix} \hat{A}_i \\ \hat{A}_j \\ \hat{A}_k \end{bmatrix} dx dy \\ &= j\sigma\omega \iint_{\Omega_e} \begin{bmatrix} N_i^e N_i^e & N_i^e N_j^e & N_i^e N_k^e \\ N_j^e N_i^e & N_j^e N_j^e & N_j^e N_k^e \\ N_k^e N_i^e & N_k^e N_j^e & N_k^e N_k^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{A}_i \\ \hat{A}_j \\ \hat{A}_k \end{bmatrix} dx dy \\ &= \frac{j\sigma\omega\Delta}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{A}_i \\ \hat{A}_j \\ \hat{A}_k \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (53)$$

第三項的積分：按 (C) 節中的設定，如 (20) 式 (∇v) 在 Z-方向是常定值，並且考慮到下列相關運算：

$$\iint_{\Omega_e} N_i dx dy = \frac{\Delta}{3} \quad (54)$$

於是 (43) 式第三項的積分結果：

$$\sigma \frac{V_{tz}}{l} \iint_{\Omega_e} [N^e] dx dy = \frac{\Delta}{3} \left(\sigma \frac{V_{tz}}{l} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (55)$$

最終，將 (49)、(53) 和 (55) 式的結果代回到 (43) 式，便可獲致單一元素關於場域方程式的矩陣表達式，並且重新整理如下：

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\Delta} [K_1] [\hat{A}^e] + \frac{j\sigma\omega\Delta}{12} [K_2] [\hat{A}^e] &= \frac{\Delta}{3} \left(\sigma \frac{V_{tz}}{l} \right) [O] \\ \Rightarrow \left(\frac{1}{4\Delta} [K_1] + \frac{j\sigma\omega\Delta}{12} [K_2] \right) [\hat{A}^e] &= \frac{\Delta}{3} \left(\sigma \frac{V_{tz}}{l} \right) [O] \end{aligned} \quad (56)$$

上式的係數矩陣內容如以下所列：

$$[K_1] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix}, \quad [K_2] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad [O] = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(D-2) 組裝全域的有限元方程式

上一節已就三角形元素推得相關場域方程的矩陣表達式(如 (56) 式)，並且可以寫成下列 (57) 式的簡單形式：

$$[K^e] [\hat{A}^e] = f^e \quad (57) \quad [K^e]: \text{磁向量位勢的定義域, 或算子。}$$

f^e : 磁向量位勢的值域, 或源項。

$$\text{其中, } \begin{cases} [K^e] = \left(\frac{1}{4\Delta} [K_1] + \frac{j\sigma\omega\Delta}{12} [K_2] \right) \\ f^e = \frac{\Delta}{3} \left(\sigma \frac{V_{tz}}{l} \right) [O] \end{cases}$$

亦即，對於單一元素區域皆存在一個係數矩陣($[K^e]$)以及一個在等號右側的向量(f^e)；兩者依據元素之間訊息的關聯，而必須映照(Mapping)且疊加(Adding)到相應的全域係數矩陣($[K]$)及全域右側向量(f)。換言之，如果要建構所有元素對 BVP 系統的貢獻，進而聯立求解(Simultaneous Solution)相關的未知變量，其必須將所有元素係數矩陣、向量分別組合成全域係數矩陣及向量，這個運作一般稱為組裝程序(Assembling Process)。

Table(1) 元素的關聯訊息

元素編碼 (e_j)	局部結點碼 (n_j)		
	n_1^e	n_2^e	n_3^e
e_1	1	5	2
e_2	2	5	3
e_3	3	5	4

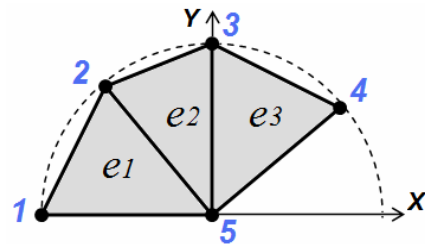


Fig.(5) 三角形元素離散構成的 2D 求解域

$$n(e, i) = n_i \quad i = 1, 2, 3.$$

(58)

e : 元素的編碼。
 n_i : 全域結點碼。

元素係數矩陣的階數與元素的結點數一致，而全域係數矩陣的階數則是與求解空間的總結點數相同。例如，線性三角形元素的係數矩陣階數為 3×3 ；並且，按照如 Fig.(5) 所示由三個元素構成的 2D 求解區域，其中的總結點數為 5，因而相關全域係數矩陣的階數為 5×5 。Fig.(5) 中的結點依 1 ~ 5 序列編碼，稱為全域(Global)結點碼，以與個別元素的局部(Local)結點碼(n^e_1, n^e_2, n^e_3)有所區別。一般是以二維陣列方式表示這些資料，如 (58) 式。

本研習將依照 Fig.(5) 及 Table(1) 的簡單構成來演示元素組合的過程。首先，組裝程序是以每個元素的全域結點碼按反時鐘方向依序聯結元素各列的訊息，如 Table(1) 中所列。值得注意的是：無論從哪一個元素啟始聯結，對最終全域訊息構成結並無差別；然而，從電腦儲存容量及運算效率的考量，其有必要對於大型(階數高)的係數矩陣，進行全域結點最佳化編碼[1,3]。

一旦元素聯結訊息的陣列形成，則產生一個輸入值全部是零的 5×5 矩陣，亦即最初的係數矩陣如下所示：

$$[K]_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (59)$$

組裝程序是經由對全部元素逐一循環(Looping)而更新全域係數矩陣裡的每一項輸入值。這可依據 MATLAB 程式編寫而達成，參附件(三)的基本格式範例。並且，在完成第一個元素的組裝之後，此時的全域係數矩陣構成更新為：

$$[K]_{e1} = \begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{13}^1 & 0 & 0 & K_{12}^1 \\ K_{31}^1 & K_{33}^1 & 0 & 0 & K_{32}^1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{21}^1 & K_{23}^1 & 0 & 0 & K_{22}^1 \end{bmatrix} \quad (60)$$

於是，依照 Table(1) 所列元素聯結訊息排序，元素係數矩陣的輸入 K_{23}^1 項係映照至全域係數矩陣裡的 K_{52} 項，而元素的輸入 K_{22}^1 項則對應到全域的 K_{55} 項，依此類推。並且，(60) 式的矩陣是相對於主對角線而呈對稱。

第二個元素組裝進來後，全域係數矩陣會再次疊加相對應的輸入項，並如下所示：

$$[K]_{e1+e2} = \begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{13}^1 & 0 & 0 & K_{12}^1 \\ K_{31}^1 & K_{33}^1 + K_{11}^2 & K_{13}^2 & 0 & K_{32}^1 + K_{12}^2 \\ 0 & K_{31}^2 & K_{33}^2 & 0 & K_{32}^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{21}^1 & K_{23}^1 + K_{21}^2 & K_{23}^2 & 0 & K_{22}^1 + K_{22}^2 \end{bmatrix} \quad (61)$$

第三個元素依相同演算法組裝後，最終得到如 Fig.(5) 所示的完整全域係數矩陣：

$$[K]_{e1+e2+e3} = \begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{13}^1 & 0 & 0 & K_{12}^1 \\ K_{31}^1 & K_{33}^1 + K_{11}^2 & K_{13}^2 & 0 & K_{32}^1 + K_{12}^2 \\ 0 & K_{31}^2 & K_{33}^2 + K_{11}^3 & K_{13}^3 & K_{32}^2 + K_{12}^3 \\ 0 & 0 & K_{31}^3 & K_{33}^3 & K_{32}^3 \\ K_{21}^1 & K_{23}^1 + K_{21}^2 & K_{23}^2 + K_{21}^3 & K_{23}^3 & K_{22}^1 + K_{22}^2 + K_{22}^3 \end{bmatrix} \quad (62)$$

明顯地，從最終的完整全域係數矩陣內容可看出：BVP 範圍內的每一元素都與周邊緊鄰的元素有所關聯；例如：(62) 式全域係數矩陣裡的 K_{55} 項，其因為三個元素(e_1, e_2 及 e_3)的共同結點(n_5)聯繫，而產生疊加($K_{22}^1 + K_{22}^2 + K_{22}^3$)的效果；類似地，矩陣裡的 K_{35} 輸入項，其因 e_2 及 e_3 元素對結點(n_3)有共同的貢獻，而產生聯合($K_{32}^2 + K_{32}^3$)的作用。

另外，組合全域的右側向量也是採取類似的方式：首先，產生一個 5×1 的零向量 (f_0)，然後對全部元素逐一更新。於是得出下列全域右側向量：

$$f_{e1+e2+e3} = \begin{bmatrix} f_{11}^1 \\ f_{33}^1 + f_{11}^2 \\ f_{33}^2 + f_{11}^3 \\ f_{33}^3 \\ f_{22}^1 + f_{22}^2 + f_{22}^3 \end{bmatrix} \quad (63)$$

同樣地，依照算子的概念及結合電磁場有限元方程式((43) 式)的物理意義，(63) 式即表示電源 $\sigma(V_{tz}/l)$ 對所有元素的各別結點所造成影響的分佈情形。

於是，完成組裝程序之後，即得到與原 BVP 相應的離散化的線性方程組，如 (64) 式所示：

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^m [K^e][\hat{A}^e] &= \sum_{r=1}^m f^e \\ \Rightarrow [K][\hat{A}] &= f \end{aligned} \quad (64) \quad \left. \begin{array}{l} [K]: \text{全域係數矩陣。} \\ f: \text{全域右側向量。} \end{array} \right\}$$

就本研習中依各項假設而簡化的 2D 時諧電磁場方程式而言，加上邊界條件以及相關數據資料(如：各別結點的座標)，即可按線性代數方法來進行求解。

(E) 結果討論

本文中以 FT031 先前文獻為基礎，幾乎都在嘗試把電機的場域方程式，轉換成 BVP 相應的離散化的線性方程組，以利於後續運用各種數值演算法(Algorithm)進行電腦程式編輯、運算，而求出目標空間內待解磁向量位勢(\vec{A})的趨近值。在整體推導的過程中，運用 Galerkin 加權餘量法，再次地從基底把 Maxwell's 方程式所描述電磁現象，翻轉成以線性三角形元素所表示而具有相同內涵的有限元方程組，則又是一最有趣的部份。儘管，本研習所介紹的整個理論推導流程只是實施有限元工程數值分析的冰山一角，仍有一段跨領域的技術需要補足(諸如：暫態運算的時步演算法，數值非線性的迭代法，網格生成技術，乃至於程式編輯.....等)；然而，對於現今商業電磁有限元分析軟體(如 JMAG-Designer)運用普及，使用者可以結合 FEM 這個數值方法的基本內涵，而對解析電機的特性與效能有深一層的認識與體驗，因而也是本文所呈現的意義與作用。

(F) 參考文獻

- [1] Dong Jing, “Computational Analysis of A PMSM Using Numerical Techniques,” Thesis, Department of Electrical & Computer Engineering, National University of Singapore, 2004.
- [2] Michael Legesse, “Coupled Simulation of an Indirect Field Oriented Controlled Induction Motor Drive,” Thesis, Computational Analysis and Design Laboratory, McGill University, Montreal, 2008.
- [3] Anastasis C. Polycarpou, “Introduction to the Finite Element Method in Electromagnetics,” Intercollege, Cyprus, 2006.
- [4] Daniel Marcsa, “Induction Motors Simulation by Finite Element Method and Different Potential Formulations with Motion Voltage Term,” Thesis, Széchenyi István University, 2008.
- [5] 謝德馨 等編著, “三維渦流場的有限元分析”, 第二版, 機械工業出版社, 2012.
- [6] 陳桂村, “FT031-感應馬達電磁渦流場數學分析模型構成探討,” 勢流科技, 2017.